Szakköri feldolgozás 2016/17. 11-12.o.

Terjedelmesebb szakköri témák:

0. Táblázatkitöltés ±1 számokkal (cikk tavalyról)

I. Vegyes versenyfeladatok

– régebbi AD, OKTV

– Kenguru versenyfeladatok

– Páros versenyek (játék)

II. A Nesbitt-egyenlőtlenség és környéke

– Nevezetes egyenlőtlenségek

III. Külföldi középiskolai versenyfeladatok

– Külföldi középiskolai geometria-versenyfeladatok

IV. Összegek előállítása (cikk)

V. Diofantoszi egyenletek

VI. Miért nem lehet … – típusú feladatok

– Róka Sándor: Miért nem lehet … 1, 2, 3

VII. Színezéses rekurziók (cikk)

VIII. Pólya-tétele (alakzatok színezése és egybevágóság)

IX. Valószínűségszámítási játékok

– Markov-láncok (valószínűség)

– Markov-láncok (várható érték)

X. A Kardos-Montágh-verseny feladatai

XI. Negatív alapú számrendszerek

XII. Gömbi geometria

– gömbi távolság számítása elemi úton

– Rábai Imre: Gömbháromszögtan (cikk)

XIII. Mi a hiba? – hibakeresés

XIV. Térbeli analitikus geometria

XV. Logikai játékok

1. 1/1. Egy könyv lapjait megszámoztuk 1-gyel kezdve 1986-tal bezárólag. Hányszor fordul elő a számozásban az 1-es számjegy?

2. 1/2. Ha egy a oldalú négyzetet párhuzamosan vetítünk az egyik oldalával párhuzamos e egyenesre, akkor a vetület $3a$ hosszúságú szakasz lesz. (Síkidom egyenesre való vetületét azok a pontok alkotják, amelyeket a síkidom összes pontján át húzott, egy adott iránnyal párhuzamos egyenesek metszenek ki az adott egyenesből.) Mekkora szöget zárnak be a vetítősugarak az e egyenessel?

3. 1/3. Határozzuk meg azokat az $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ pozitív egész számokat, amelyek kielégítik a $3^{a_1}+3^{a_2}+\ldots+3^{a_{14}}=6558$ egyenlőséget!
M1: frontális mo.
M2: 3-as számrendszer

4. Számrendszerek konverziója (2 irányban)

5. 1/4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c egész számok esetén az $abc\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)$ szorzat osztható 80-nal!

6. 1/5. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=378 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

7. Horner-algoritmus
– a helyettesítési érték kiszámítására
– (számrendszer konverzió)
(**Mj:** polinomok osztása)

8. $x^2-3xy-8x+y+3=0$; $x, y \in \mathbf{Z}$

Mj: diof. egyenletek megoldási módszerei:
– vegyes paraméterezés (diszkrimináns)
– szorzattá alakítás csoportosítással
– szorzattá alakítás együtthatók egyeztetésével
– függvénytani megoldás (változó kifejezése)

9. $x^2+4x+5=y^2$; $x, y \in \mathbf{Z}$
M1: közrefogás
M2: nevezetes azonosság

Mj: közrefogás (négyzetszámok)

10. Bbe: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$; $a, b, c > 0$
M1: kiegészítés, hatványközepek

M2: szimmetrizáció, reciprok-egyn.
M3: frontális megoldás (rendezési tétel)
M4: $S = a + b + c$, függvények (Jensen-egyn.)

Mj: rendezési tétel
Mj: Jensen-egyenlőtlenség

11. Horner-algoritmus – polinomok osztása

12. $ABC\Delta$, $a, b, c \in \mathbf{Z}^{+}$; $r = 1$; $a, b, c = ?$
Mj: szimmetrizáció
Mj: szimmetria megbontása

13. 2/13. Németország, 1999, 1. forduló
100 majom között kiosztottunk 1600 kókuszdiót (lehetséges, hogy néhány majom egyet sem kapott). Bizonyítsuk be, hogy a kiosztástól függetlenül mindig lesz négy majom, akik ugyanannyi kókuszdiót kaptak.

14. 2/14. Spanyolország, 2002, döntő
Egy szabályos $6n + 1$-csúcsú sokszög csúcsait pirossal és kékkel kiszíneztük. Bizonyítsuk be, hogy az egyszínű csúcsokkal rendelkező egyenlő szárú háromszögek száma a színezéstől független (tehát csak a piros és kék csúcsok számától függ).

15. A Cauchy-Schwarz-Bunyakovszki-egyenlőtlenség

16. 1/7. Ha a $3x^2 - 2x + 5$ polinomban az x helyébe egy másik polinomot helyettesítünk, akkor a $12x^4 + 56x^2 + 70$ polinomot kapjuk. Mennyi az x helyébe helyettesített polinom együtthatóinak összege?
M1: együtthatók egyeztetése
M2: $p(1)$ helyettesítési érték

17. 1/8. Állapítsuk meg az $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b - x)^2 + c^2}$ függvény minimumát, ha a, b, c adott pozitív valós számok!
M1: geometriai elv
M2: vektorok
M3: deriválás

18. 1/9. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán!
$xyz + xz + yz - xy - x - y + z = 1986$

19. 1/10. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív számok körében: $x + \frac{1}{x} = -y^2 + 6y - 7$.

20. Egy régi általános iskolás feladatban egymás mellé írunk 6 darab 2-est, és a 2-esek közé írt négy alapműveleti jel, valamint a zárójelek felhasználásával rendre elő kell állítani az 1, 2, … , 10-es összeget.
Bbe, hogy minden célösszeg előállítható; sőt minden előállítás megvalósítható a 2 helyett a csupa 3, csupa 4, … , csupa 9 kezdőszámok esetén is! (Ez 8 különböző feladat!)
Mj: Ált. 12x12-ig

21. 10 db 2-essel az 1–100 összegek előállítása

22.

23. $ABC\Delta$, $a, b, c \in \mathbf{Z}^{+}$; $k = t$; $a, b, c = ?$

24. A rendezési tétel

25. 2/15. Litvánia, 2001. október
A 6x6-os sakktáblát 18 darab 2x1-es dominóval fedtük le (hézagmentesen és átfedés nélkül). Bizonyítsuk be, hogy a mezőket elválasztó függőleges vagy vízszintes vonalak között van olyan, amelyik egyetlen dominót sem metsz el.

26. 2/16. Bulgária, 1994
Adott 33 természetes szám, amelyek prímosztói a 2, 3, 5, 7, 11 számok közül kerülnek ki. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük két olyan szám, amelyek szorzata négyzetszám.

27. B27

28. B25
29. P3/G4
30. G8
31. G10
32. elemi szimmetrikus polinomok
33. G2 megoldásai
34. szelőszakaszok tétele

35. szabályos 8-szög színezése 3 színnel
36. 8 hosszú sorozat színezése 2 színnel
37. Nesbitt-egyn. általánosítása 4 tagra

38. összegek előállítása 10 darab 7-essel
39. rekurziók alapjai
40. gúla L = 17; é = ?
41. négyzetszám és köbszám végződése ua.
42. P3/szögszámolás
43. Adott a derékszögű triéder három lapjának a területe – V = ?
44. G3
45. G11/a
46. G11/b
47. G11/c
48. 48 a) számrendszerek

VII. Színezéses rekurziók általános tárgyalása

VIII. Pólya-tétele (alakzatok színezése és egybevágóság)

A Kardos-Montágh-verseny feladatainak megbeszélése

Márciusi feladatsor (Szakköri anyag 17_03)

XI. Negatív alapú számrendszerek

XII. Gömbi geometria

– gömbi távolság számítása elemi úton

– Rábai Imre: Gömbháromszögtan (cikk)

IX. Valószínűségszámítási játékok