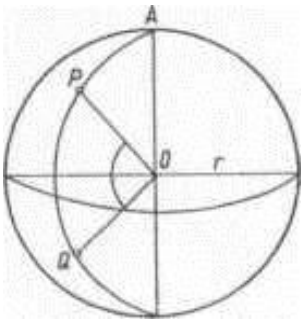
Rábai Imre: Gömbháromszögtan
(*A kultúra világa – Matematika, fizika, kémia, Közgazdasági és jogi könyvkiadó, 1964*)

GÖMBI TÁVOLSÁG

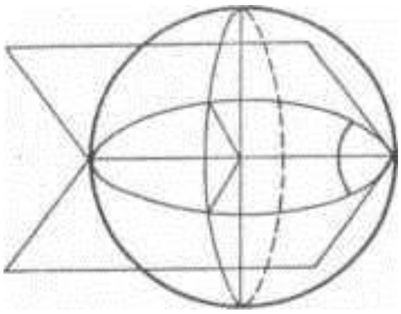
Legyen adott a gömbfelület két pontja, *P* és *Q*. Ha ezek a gömb középpontjával, *O*-val egy egyenesbe esnek, *P*-t és *Q*-t ***átellenes pontoknak,*** nevezzük. Ha *P* és *Q* nem átellenes pontok, rajtuk keresztül csak egy főkör megy, melyet az *OPQ* sík a gömbfelületen kimetsz.



(A főkör olyan gömbi kör, melynek sugara megegyezik a gömb sugarával.) Két nem átellenes pont tehát egyértelműen meghatároz egy főkört. E főkörnek a *P* és *Q* közötti kisebbik ívét a *P* és *Q* pontok gömbi távolságának nevezzük. Két átellenes pont távolságán félfőkörívet értünk. A $\overline{PQ}$ ív hossza: $\overline{PQ} = rPOQ\angle$, ahol *r* a gömb sugara.

Ha ugyanazon gömb különböző pontjainak távolságát hasonlítjuk össze, a gömb sugarát egységnyinek vehetjük, így a gömbi távolságokat szögekkel fejezhetjük ki. A gömbön a távolságmérés tehát szögmérés. A szögeket fokokban vagy radiánban is mérhetjük.

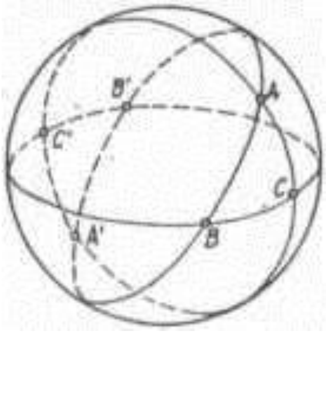
A gömbfelületen a főkörívek játsszák ugyanazt a szerepet, mint síkban az egyenesek. Eltérés van abban, hogy két főkör egymást két (átellenes) pontban metszi. Így ún. gömbkétszög jön létre. A gömbkétszöget határoló fél-főköröket, a gömbkétszög oldalainak nevezzük. Ezek 180°-kal egyenlők.



Két egymást metsző főkörív által bezárt szögön a metszéspontjukban húzott érintők hajlásszögét értjük. Ez a szög megegyezik a főköríveket kimetsző két sík által bezárt lapszöggel. Ennek a szögnek a meghatározása akkor válik egyértelművé, ha pl. a főköríveken adunk meg haladási irányt, és a szögön egy olyan elforgatás nagyságát értjük, mellyel az egyik főkörív, haladási irányával együtt átmegy a másik főkörívbe.

A középpontban a főkör síkjára merőleges egyenes a gömbfelületen két átellenes pontot metsz ki. Ezt a két pontot a főkör pólusainak nevezzük, a főkört pedig bármely pólusa polárisának. Az a pólus, mely a főkörön adott bejárási értelemben haladva bal kéz irányában fekszik, a bal oldali pólus. Két főkör által bezárt szög egyenlő a megfelelő pólusaik által bezárt szöggel, azaz a pólusok gömbi távolságával.

GÖMBHÁROMSZÖG



Egy háromélű testszöglet (triéder), ha csúcsa a gömb középpontja, a gömbfelületből ***gömbháromszöget*** vág ki. A gömbháromszöget határoló ívek a gömbháromszög *oldalai,* az ívek közös pontjai a gömbháromszög csúcsai, az oldalak által bezárt belső szögek a gömbháromszög szögei. Most csak az ún. Euler-féle gömbháromszögekkel foglalkozunk, amelyekben minden oldal és szög kisebb, mint 180°.

Az *ABC* gömbháromszög oldalainak meghosszabbításai egymást a háromszögön kívül fekvő *A'*, *B'* és *C'* pontokban metszik. A gömbfelületet a három főkör nyolc gömbháromszögre osztja. A csúcsok átellenes pontjai által alkotott *A'B'C'* háromszög az *ABC* háromszög ***átellenes háromszöge.*** Az *A'BC, AB'C, ABC'* háromszögek, melyeknek egy-egy oldala közös az *ABC* háromszöggel, az *ABC* háromszög ***mellékháromszögei.***

Az átellenes háromszögek megfelelő oldalai és szögei egyenlők, a mellékháromszög közös oldalai és ezen oldalakkal szemközt fekvő szögei egyenlők, a többi oldalak és. szögek egymást 180°-ra egészítik ki.

A gömbháromszög minden oldalához két pólus tartozik. Járjuk be az oldalakat *ABCA* sorrendben és vegyük a baloldali pólusokat, melyek egy gömbháromszöget, az eredeti gömbháromszög ***polárgömbháromszögét*** határozzák meg. Bármely gömbháromszög a saját polárgömbháromszögének polárgömbháromszöge. Igazolható, hogy a polárgömbháromszögek egyikének az oldalai a másiknak a megfelelő szögeit 180°-ra egészítik ki.

A gömbfelületen a gömbháromszög oldalait kimetsző triéder lapszögei a gömbháromszög szögeivel, élszögei a gömbháromszög oldalaival egyenlők. Így a triéderre bizonyított tételek érvényesek a gömbháromszögekre.

Egy gömbháromszög két oldalának összege a harmadik oldalnál nagyobb.

A főkörív tehát az a legrövidebb távolság, amellyel két pont a gömbfelületen összeköthető.

A gömbháromszög oldalainak összege kisebb 360°-nál.

Ha ezt a tételt a polárgömbháromszög oldalaira alkalmazzuk, úgy kapjuk: A gömbháromszög szögeinek összege nagyobb 180°-nál (és kisebb 540°-nál). Ugyanis, ha a, b, c egy gömbháromszög oldalai és α, β, γ a szögei, akkor a polárgömbháromszög oldalai $180° - \alpha$; $180° - \beta$; $180° - \gamma$; tehát ha $a + b + c < 360°$, akkor $180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma < 360°$, vagy más alakban

$\alpha + \beta + \gamma > 180°$.

A gömbháromszögre, a síkháromszögekhez hasonlóan, sok tételt írhatnánk fel, ezekkel itt nem foglalkozunk, egyeseket viszont bizonyítás nélkül felhasználunk. (Pl. itt is érvényes, hogy nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög fekszik és ennek megfordítása.)

A GÖMBKÉTSZÖG ÉS GÖMBHÁROMSZÖG FELSZÍNE

Egy gömb gömbkétszögeinek felszíne a szögükkel arányos. Így ha a gömbkétszög szöge α (radiánban), akkor

$\alpha : \pi = F_\alpha : 2\pi r^2$ (ahol F_α a gömbkétszög felszíne, r pedig a kör sugara). Ebből

$F_\alpha = 2\alpha r^2$.

Az átellenes gömbháromszögek felszíne egyenlő.

Legyen az *ABC* gömbháromszög felszíne F, az *A'BC, AB'C, ABC'* mellékgömbháromszögek felszíne rendre F_1, F_2, F_3. Így

$$F + F_1 = 2r^2\alpha$$
$$F + F_2 = 2r^2\beta$$
$$\underline{F + F_3 = 2r^2\gamma}$$
$$3F + F_1 + F_2 + F_3 = 2r^2(\alpha + \beta + \gamma)$$

Az egész gömb felszíne nyolc, páronként átellenes gömbháromszög felszínének összege: $2\cdot(F + F_1 + F_2 + F_3) = 4r^2\pi$. Ezt felhasználva

$2F = 2r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$

$F = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$

Az $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ *értékét gömbi feleslegnek (szférikus excesszus)* nevezzük, és ε-nal jelöljük. $F = r^2\varepsilon$.

A GÖMBHÁROMSZÖG MEGOLDÁSA

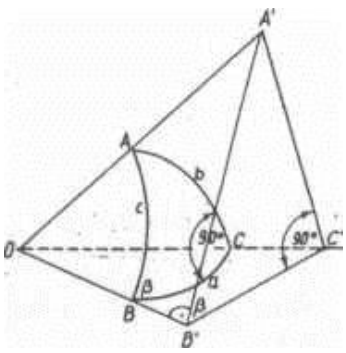
A gömbháromszög hat alapadata (3 oldal, 3 szög) közül bármely három a többit egyértelműen meghatározza, ha eleget tesznek az oldalakra és szögekre vonatkozó összefüggéseknek, amelyekre az előző pontban utaltunk. Egy kivételes eset van, ha két szög vagy két oldal derékszög (pl. a = 90°, b = 90° esetén $\gamma = c$ és α = 90°, β = 90°). A gömbháromszögben három szög független adat, mely a gömbháromszöget meghatározza. A gömbfelületen nincsenek hasonló háromszögek.

Itt csak néhány megoldási esettel foglalkozunk. Először a derékszögű gömbháromszögek megoldását vizsgáljuk.

Egy gömbháromszög és a polárgömbháromszög adatai közötti kapcsolat alapján ha az oldalakra találunk valamilyen összefüggést, úgy ezt a polárgömbháromszögekre alkalmazva, a szögekre is kapunk összefüggést.

A DERÉKSZÖGŰ GÖMBHÁROMSZÖG

Legyen az ABC gömbháromszögben γ = 90°, az ***a*** és ***b*** oldalak hegyesszögek. A gömbháromszög triéderét egészítsük ki az $OA'B'C'$ tetraéderré, egy olyan síkkal való metszéssel, mely B'-ben merőleges az OB'-re, így az $OB'C'$ síkra is.



$A'B'$ és $B'C'$ merőleges OB'-re. $A'C'$ merőleges OC'-re, tehát az $OB'A'$; $OC'A'$; $OB'C'$ síkháromszögek derékszögűek (a derékszögek a középső betűk által jelzett csúcsoknál vannak). Az $OB'A'$ háromszögben az $A'B'$ befogóval szemközti szög a gömbháromszög c oldala, így

$$\cos c = \frac{OB'}{OA'} = \frac{OB'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{OA'} = \cos a \cdot \cos b\,.$$

Az $\frac{OB'}{OC'}$ és a $\frac{OC'}{OA'}$ arányokat az $OB'C'$ és OCA' derékszögű háromszögekből fejeztük ki. A kapott

$\cos c = \cos a \cdot \cos b$

képlet a derékszögű gömbháromszög oldalai között állapít meg összefüggést, ezért a ***gömbháromszögtan Pitagorasz-tételé***nek nevezik.

Egy hegyesszög sinusa kifejezhető két oldal sinusának arányával.

$$\sin\beta = \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{A'C'}{OA'} : \frac{A'B'}{OA'} = \frac{\sin b}{\sin c}\,.$$

Hasonlóan $\sin\alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$.

A szög cosinusára a következőt kapjuk:

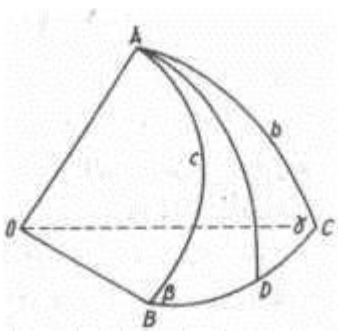
$$\cos\beta = \frac{B'C'}{A'B'} = \frac{B'C'}{OB'} : \frac{A'B'}{OB'} = \frac{\mathrm{tg}\,a}{\mathrm{tg}\,c}\,.$$

Hasonlóan $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{tg}\,b}{\mathrm{tg}\,c}$.

Ha az ***a*** és ***b*** oldal nem hegyesszögek, akkor a mellékgömbháromszög oldalai már igen. Erre alkalmazva a kapott összefüggéseket beláthatjuk, hogy tompaszög esetén is érvényben maradnak.

A GÖMBHÁROMSZÖGTAN SINUS-TÉTELE

Legyen ABC egy derékszöget nem tartalmazó gömbháromszög, így OA nem merőleges az OBC síkra. Az OA egyenesen át az OBC síkra csak egy merőleges sík fektethető. Ez a sík a



gömbfelületen kimetsz egy főkört, mely átmegy *A*-n, és messe a *BC* oldalt *D*-ben. Az *AD* gömbi távolság az *ABC* gömbháromszöget két derékszögű gömbháromszögre bontja (az *ADC*∠ és *ADB*∠ derékszög). Az *ABD* és *ACD* derékszögű gömbháromszögben

$$\sin\beta = \frac{\sin\overline{AD}}{\sin c}, \qquad \sin\gamma = \frac{\sin\overline{AD}}{\sin b}$$

Az egyikből sin *AD*-t kifejezve és a másikba helyettesítve sin β : sin γ = sin *b* : sin *c* összefüggést kapjuk. Ugyanígy

sin α : sin β = sin *a* : sin *b*, vagy együtt a kettő:

sin α : sin β : sin γ = sin *a* : sin *b* : sin *c*.

A gömbháromszög szögeinek sinusai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemben fekvő oldalak sinusai. Ez a gömbháromszögtan sinus-tétele.

Ha adott két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög, úgy a sinus-tétellel kiszámítható a kisebbel szemközti szög.

A megoldás során a szög sinusa a szöget még nem határozza meg egyértelműen, hiszen sin α = sin (180° – α). Ezért azt a szöget kell választani, amelyik esetében teljesült a „nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik" tétel. Ha a kisebbikkel szemközti szög adott, akkor a síkháromszögtanhoz hasonlóan 0, 1 vagy 2 megoldást kaphatunk. Ugyanez a meggondolás érvényes, ha két szög és valamelyikkel szemben fekvő oldal adott.

A GÖMBHÁROMSZÖGTAN COSINUS-TÉTELE

Az előbb kapott *ADB* és *ADC* derékszögű gömbháromszögekre alkalmazhatjuk a megismert Pitagorasz-tételt.

$$\cos c = \cos\overline{BD}\cdot\cos\overline{AD}$$

$$\cos b = \cos\overline{CD}\cdot\cos\overline{AD}$$

Elosztva egymással a két egyenletet

$$\frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos\overline{BD}}{\cos\overline{CD}} = \frac{\cos\left(a-\overline{CD}\right)}{\cos\overline{CD}} = \frac{\cos a\cdot\cos\overline{CD} + \sin a\cdot\sin\overline{CD}}{\cos\overline{CD}}$$

$$\frac{\cos c}{\cos b} = \cos a + \sin a\cdot\mathrm{tg}\overline{CD}.$$

Az *ADC* háromszögből $\cos\gamma = \dfrac{\mathrm{tg}\overline{CD}}{\mathrm{tg} b}$, amiből $\mathrm{tg}\overline{CD} = \mathrm{tg} b\cdot\cos\gamma$.

Így $\dfrac{\cos c}{\cos b} = \cos a + \sin a\cdot\mathrm{tg} b\cdot\cos\gamma$, ebből

$\cos c = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma$. Hasonlóan

$\cos a = \cos b\cdot\cos c + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha$,

$\cos b = \cos a\cdot\cos c + \sin a\cdot\sin c\cdot\cos\beta$.

Ez a gömbháromszögtan oldalakra vonatkozó cosinus-tétele.

Ennek a tételnek a segítségével három adott oldalból meghatározhatjuk a szögeket, továbbá két oldalból és a közbezárt szögből meghatározhatjuk a harmadik oldalt.

Ha a polárgömbháromszögre alkalmazzuk a tételt, úgy a szögekre vonatkozó cosinus-tételt kapjuk.

$\cos\alpha = -\cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a$,

$\cos\beta = -\cos\alpha\cdot\cos\gamma + \sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos b$,

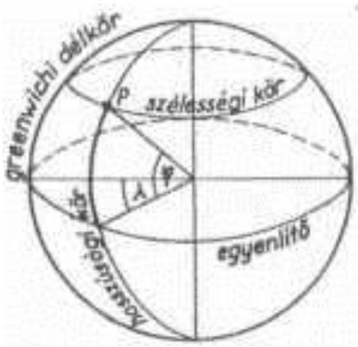
$\cos\gamma = -\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos c$.

Ennek a tételnek a segítségével három adott szögből meghatározhatjuk az oldalakat, továbbá egy oldalból és a rajta fekvő két szögből a harmadik szöget.

A gömbháromszögekre az itt megismert sinus- és cosinus-tételeken kívül – a síkháromszögekhez hasonlóan – igen sok összefüggés ismeretes, amelyekkel itt nem foglalkozhatunk.

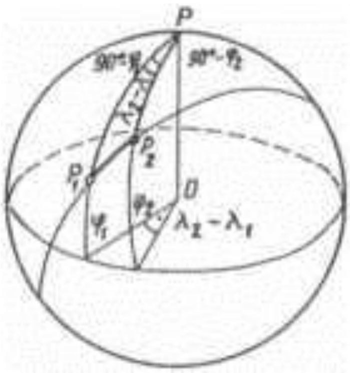
TÁVOLSÁGMEGHATAROZÁS A FÖLDGÖMBÖN

A föld felületén helymeghatározás céljára koordináta-rendszert vezethetünk be. A



tengelyeket két egymásra merőleges főkör alkotja, melyeket tetszés szerint választhatunk meg. A föld forgása által kitüntetett főkör a forgástengelyre merőleges – egyenlítő. Ezt választjuk egyik tengelynek. Az erre merőleges főkörök egymást a föld északi és déli pólusaiban metszik (Északi és Déli sarok). Ezeket a főköröket ***délköröknek*** vagy hosszúsági köröknek nevezzük, közülük nemzetközi megállapodás szerint a greenwichit (Greenwich, London külvárosa, ahol 1675–1948-ig csillagvizsgáló működött) választjuk másik tengelynek.

A P pont helyzetét a következő két koordináta határozza meg:



1. a P-n átmenő délkörnek a P és az egyenlítő közötti íve. Ez a P pont ***földrajzi szélessége*** (φ). Az északi féltekén pozitív, a délin negatív 0° és 90° közötti érték.

2. Az egyenlítőnek a 0-ik (greenwichi) és a P ponton átmenő délkörrel való metszéspontjai közötti íve. Ez a P pont ***földrajzi hosszúsága*** (λ). Greenwichtől keletre pozitív, nyugatra negatív 0° és 180° közötti érték.

Ha P_1 és P_2 pontok φ_1 és φ_2 koordinátáit ismerjük, akkor a P_1P_2 távolság meghatározható a P_1PP_2 háromszögből.

Ebben $\overline{PP_1} = 90° - \varphi_1$; $\overline{PP_2} = 90° - \varphi_2$; a kettő által bezárt szög $\lambda_2 - \lambda_1$. A cosinus-tétel szerint:

$$\cos\overline{P_1P_2} = \cos(90° - \varphi_1)\cdot\cos(90° - \varphi_2) + \sin(90° - \varphi_1)\cdot\sin(90° - \varphi_2)\cdot\cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Tehát

$$\cos\overline{P_1P_2} = \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\cos\beta(\lambda_2 - \lambda_1).$$

A P_1P_2 szög (a távolság) kifejezhető. Ha a föld sugarát 6378 km-nek vesszük (az Egyenlítő sugarának hossza 6378,2 km), akkor 1°-nak megfelel $\frac{6378\cdot\pi}{180°}$ km (kb. 111,2 km) távolság.

Például:

Határozzuk meg Berlin és Buenos Aires földgömbi távolságát.

Berlin: $\varphi_1 = 52°30'$ Buenos Aires: $\varphi_2 = -34°36'$

$\lambda_1 = 13°24'$ $\lambda_2 = = -58°22'$

A távolságot d-vel jelölve:

$\cos d = -\sin 34°36'\cdot\sin 52°\,30' + \cos 34°36'\cdot\cos 52°30'\cdot\cos 71°46'$,

$\cos d = -0{,}4505 + 0{,}1568$, $\cos d = -\,0{,}2937$, $d = 107{,}08°$.

Tehát a távolság: 107,08·111,2 km = 11 907 km.