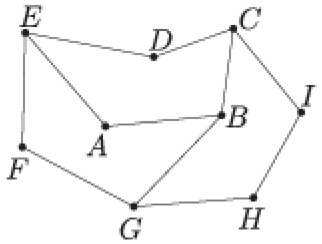
KöMaL C-gyakorlatok 1238 –

C. 1238. Melyek lehetnek az *a*, *b*, *c* számjegyek, ha a 10-es számrendszerben felírt számokra fennáll, hogy $\overline{aa}^2+\overline{bb}=\overline{cccc}$?

C. 1239. Adjunk meg olyan természetes számokból álló *x*, *y*, *z* számhármast ($x<y<z$), amelyre $3^x+3^y+3^z=179\,415$.

C. 1240. Az *ABCDE* ötszöget a *HICBG* ötszög *C* körüli forgatásával, az *FGBAE* ötszöget pedig az *ABCDE* ötszög *E* körüli forgatásával kaptuk, ahogyan ezt a *vázlatrajz* mutatja. Az *AB* szakasz hossza 7 cm.



Milyen hosszú a 11 szakasz összesen?

C. 1241. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\left|\frac{4x}{x+3}\right|-\frac{1}{2}.$$

C. 1242. Egy derékszögű háromszög oldalai 3, 4, 5. Határozzuk meg azt az egyenest, amely a háromszög kerületét és területét is felezi.

C. 1243. Az ötöslottó esetén mi a valószínűbb?
(*a*) A nyerőszámok egy számtani sorozat egymást követő elemei.
(*b*) A kisorsolt számok közül a 15 a legnagyobb.

C. 1244. Egy téglatest minden élének hossza egész szám, testátlója 65, legnagyobb területű átlós metszetének területe 1500. Adjuk meg a téglatest éleinek hosszát. (Az átlós metszet tartalmazza két szemközti lap egymással párhuzamos átlóit.)

C. 1245. Vegyünk két szomszédos háromszögszámot, és az egyik háromszorosához adjuk hozzá a másikat. Mutassuk meg, hogy így ismét háromszögszámot kapunk.

C. 1246. Egy húrtrapéz magassága 30 cm, szára 34 cm. A trapézba kör írható. Határozzuk meg a szárakon lévő érintési pontok távolságát.

C. 1247. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x+\sqrt{y}&=1\\ \sqrt{x}+y&=1 \end{aligned}\right\}$$

C. 1248. Határozzuk meg az összes $\overline{abc}$ háromjegyű számot, melyre $\overline{abc}=a!+b!+c!$, ahol $n!$ jelöli 1-től *n*-ig a pozitív egész számok szorzatát.

C. 1249. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{\frac{\cos 15°}{2}x^2-\cos 45° x+\sin 15°}=3+4\sin^2 15°.$$

C. 1250. Egy háromszög oldalai: $a = 2t - 1$, $b = t^2 - 1$, $c = t^2 - t + 1$, ahol $t > 1$ valós szám. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög beírt körének sugara $(t-1)\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 1251. Egy egységnyi sugarú félkör alakú fémlemezt három körszelet levágásával trapézzá szabunk át. Hogyan válasszuk meg a trapéz méreteit, hogy a hulladék minimális legyen?

C. 1252. Négy egymás után következő páratlan szám szorzata 9-re végződik. Mi lehet a szorzatban a 9-es előtt álló számjegy?

C. 1253. Igazoljuk, hogy az olyan derékszögű háromszögekben, amelyekben minden oldalhossz egész szám, a derékszögű csúcs és az átfogó két harmadoló pontja által meghatározott háromszög területe is egész szám.

C. 1255. Adjuk meg az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, ha az $n^4 = \overline{a6bc4d641}$ egyenletben az n egy olyan pozitív egész szám, amelyben a számjegyek balról jobbra növekedve követik egymást.

C. 1256. Egy király esélyt ad egy elítéltnek a megmenekülésre. Ehhez az elítéltnek bekötött szemmel három urnából kell egy-egy golyót húznia, majd a három kihúzott golyót egy negyedik urnába helyezik az őrök. A negyedik urnából ismét kell egy golyót húznia a bekötött szemű elítéltnek, aki megmenekül, ha ez a golyó fehér. Mekkora a megmenekülés valószínűsége, ha az urnákban a különböző színű golyók száma a következő:

	fehér	piros	fekete
1. urna	2	5	3
2. urna	5	2	3
3. urna	3	3	4

C. 1257. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $b = 1{,}5a$ és $\beta = 2\alpha$. Hányszorosa a c oldal hossza az a oldal hosszának?

C. 1258. Egy kúp alapkörének sugara 1, magassága 2. Az alapkör sugarát x-szel növeljük, magasságát ugyanennyivel csökkentjük. Mekkora x érték esetén lesz a kúp térfogata maximális?

C. 1254. Az ABC háromszögben a C-ből induló magasság T talppontjára teljesül, hogy $AT = 3TB$. Jelöljük az AB felezőpontját F-fel, továbbá a CT magasság azon pontját D-vel, ahonnan az AB derékszög alatt látszik. Igazoljuk, hogy ha az ABC háromszög magasságpontja egybeesik az FBD háromszög súlypontjával, akkor AD felezi a BAC szöget.

C. 1259. Gondoltunk három, legalább kétjegyű egész számra. Tudjuk, hogy az első számnál eggyel nagyobb, a második szám kétszeresénél néggyel nagyobb és a harmadik szám háromszorosánál kilenccel nagyobb számok egyenlők. Legalább mekkora lesz a három gondolt szám szorzata?

C. 1260. Az $ABCD$ egységnégyzet AB, BC, CD, DA oldalainak felezőpontja rendre: E, F, I, H. Az ED és HI egyenesek metszéspontja legyen M, az EC és FI egyenesek metszéspontja legyen G. Mekkora a $MEGI$ négyszög területe?

C. 1261. Hány olyan pozitív egészekből álló számhármas létezik, amelyek összege 30, és közülük bármely kettő összege nagyobb a harmadik számnál?

C. 1262. Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrnégyszög egyben érintőnégyszög is, és az egyik szöge derékszög, akkor szimmetrikus.

C. 1263. Keressük meg a 144-nek azt a legkisebb többszörösét, amely csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz.

C. 1264. Az *ABC* háromszög *A* csúcsából induló belső szögfelező a szemközti oldalt a *P* pontban, az *AP* szakasz felezőmerőlegese az *AC* oldalt a *Q* pontban metszi. Fejezzük ki az *ABPQ* négyszög területét az *AB*, *AQ* szakaszok és a *BAQ* szög ismeretében.

C. 1265. Határozzuk meg az $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$ kifejezés legkisebb értékét.

C. 1266. Oldjuk meg az $5(2n+1)(2n+3)(2n+5) = \overline{ababab}$ egyenletet, ahol n pozitív egész számot, a és b különböző számjegyet, $\overline{ababab}$ pedig egy hatjegyű számot jelöl.

C. 1267. Adott a síkon egy konvex szögtartomány, belsejében egy *S* pont. Határozzuk meg (például a szerkesztési eljárás megadásával) azt az egyenest, amely által a szögtartományból levágott háromszög súlypontja éppen az *S* pont.

C. 1268. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a és b valós számokra fennáll: $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$.

C. 1269. Legalább hány oldala van annak a szabályos sokszögnek, amelynél a körülírt kör sugara a beírt kör sugarának legfeljebb 1,1-szerese?

C. 1270. Rajzoltunk néhány egyenest és kört egy lapra úgy, hogy bármely kettőnek van metszéspontja és semelyik három nem megy át közös ponton. Hány kört és hány egyenest rajzoltunk, ha összesen 75 metszéspontjuk van?

C. 1271. Rajzoljuk meg egy derékszögű háromszög körülírt körének a háromszöget tartalmazó félkörét. A félkörhöz húzzunk a háromszög befogóival párhuzamos érintőket. Ezek az átfogó egyenesével az eredetihez hasonló háromszöget határoznak meg. Mekkorák a háromszög szögei, ha a külső háromszög területe 6-szorosa a belső háromszög területének?

C. 1272. Egy 100-tagú számtani sorozat összege a 68. tag nélkül 838, a 13. tag nélkül pedig 849. Mekkora a kihagyott tagok értéke?

C. 1273. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n, k \in \mathbf{N}$ esetén $3^{4n} + 4 \cdot 74^k$ osztható 5-tel.

C. 1274. Egy cég 482 dolgozója 30 járművel csapatépítő tréningre utazik, amelyek 4, 19, illetve 21 utast tudnak szállítani. Minden járműnek tele kell lennie. Melyik járműből hányra van szükségük? Az összes megoldást adjuk meg.

C. 1275. Melyik az a legnagyobb ötjegyű $\overline{abcde}$ pozitív egész, ami osztható a $\overline{bcde}$, $\overline{cde}$, $\overline{de}$ és e számok mindegyikével?

C. 1276. Az *ABCD* paralelogramma *AB, BC, CD, DA* oldalainak belső pontjai rendre *X, Y, Z, V*, amelyekre fennáll:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{BY}{YC} = \frac{CZ}{ZD} = \frac{DV}{VA} = k,$$

ahol a k egy $\frac{1}{2}$-nél kisebb pozitív állandó. Mekkora k értéke, ha az $XYZV$ négyszög területe az $ABCD$ paralelogramma területének 68%-a?

C. 1277. Az r^2 értékétől függően hány megoldása van az

$x^2 + y^2 = r^2$,
$|x| + |y| = 2$

egyenletrendszernek?

C. 1278. Határozzuk meg n értékét, ha $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja.

C. 1279. Határozzuk meg azon $ABCD$ négyzeteket, melyek A csúcsa a $(4;-2)$ pont, B csúcsa rajta van a $b{:}(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ körön, D csúcsa pedig a $d{:}4x + 3y + 2 = 0$ egyenesen.

C. 1280. Bizonyítsuk be, hogy ha az m és n természetes számok relatív prímek, akkor $m + n$ és $m^2 + n^2$ legnagyobb közös osztója 1 vagy 2.

C. 1281. Egy trapéz szárainak metszéspontját jelölje M. Az alapokkal párhuzamos, M-en átmenő egyenesen jelölje A és B az egyenes metszéspontját a trapéz átlóinak meghosszabbításával. Bizonyítsuk be, hogy $|AM| = |BM|$.

C. 1282. Hány megoldása van a $2^a + 3^b + 4^c + 5^d + 6^e = 22$ egyenletnek, ha a, b, c, d, e egész számok?

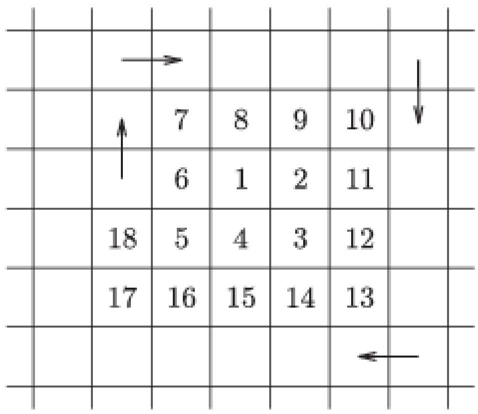
C. 1283. Az $ABCD$ trapéz hosszabbik, AB alapja nem nagyobb a CD alap háromszorosánál. Felezzék a trapéz területét az e és f egyenesek, melyek rendre párhuzamosak a BC és DA szárakkal. Jelölje az e metszéspontját AB-vel P, f metszéspontját pedig Q, továbbá a DC-vel való metszéspontokat rendre P' és Q'.
a) Igazoljuk, hogy az e és f egyenesek M metszéspontja illeszkedik a trapéz középvonalára.
b) Ha a $PQ'P'Q$ négyszög paralelogramma, akkor hányadrésze lesz a MPQ háromszög területe az $ABCD$ trapéz területének?

C. 1284. Magyar kártyából öt lapot húzva melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy az öt lap azonos színű vagy annak, hogy van köztük négy azonos szám vagy figura?

C. 1285. Egy egyenlő szárú háromszögbe írható kör sugarának hosszát elosztjuk a körülírható kör sugarának hosszával. Legfeljebb mekkora lehet a kapott hányados?

C. 1286. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:
$y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x$,
$x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y$.

C. 1287. Egy elég nagy négyzethálós lapra csigavonalban haladva felírjuk a pozitív egész számokat az *ábra* szerint. Melyik számok állnak a 2015 felett és alatt?



C. 1288. Az *ABCD* paralelogramma *AB* oldalának a *B* csúcshoz közelebb eső harmadolópontja *H*, a *BC* oldal felezőpontja pedig *F*. Milyen arányban osztja az *AF* és *DH* szakaszok metszéspontja ezeket a szakaszokat?

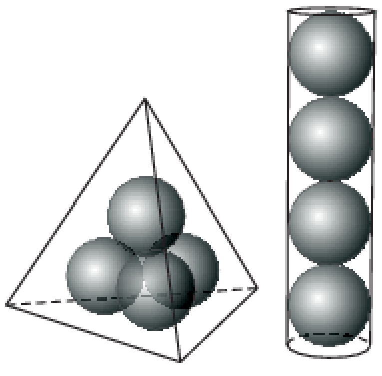
C. 1289. Van 5 darab ötforintos, 10 darab tízforintos és 20 darab húszforintos pénzérménk. Hányféleképpen válthatunk fel 500 Ft-ot a pénzérmék felhasználásával?

C. 1290. Oldjuk meg az $(x; y)$ egész számpárok körében a $2xy + 2x - 5y = 40$ egyenletet.

C. 1291. Az *x*-tengely mely pontjából látszik legnagyobb szögben az $A(2; 4)$ és $B(6; 1)$ pontok által meghatározott szakasz?

C. 1292. Oldjuk meg a $\left(3\sqrt{3}\right)^n - \left(2\sqrt{2}\right)^n = 2^n + 3^n + \left(\sqrt{6}\right)^n$ egyenletet a pozitív egészek körében.

C. 1293. Az Alfa sportszergyártó négyesével csomagolja a teniszlabdákat: gúlába rendezve egy szabályos tetraéder alakú dobozba (*1. ábra*). Az AFLA cég szintén négyesével csomagolja a teniszlabdákat: egymásra téve egy hosszú henger alakú (alul-felül zárt) dobozba (*2. ábra*). Mekkora az eltérés a kétféle doboz felülete között, ha egy teniszlabda átmérője 6,50 cm?



1. ábra *2. ábra*

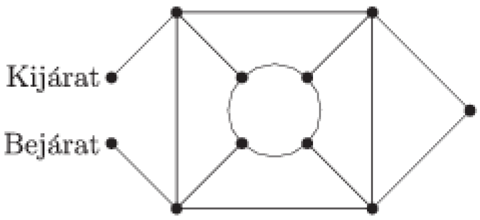
C. 1294. Fejezzük ki a $\frac{13}{38}$ törtet $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ alakban, ahol *m* és *n* pozitív egész számok.

C. 1295. Az *ABCD* négyszög *C* és *D* csúcsánál levő szög megegyezik, továbbá az *A* és *B* csúcsnál levő belső szögfelezők *E* metszéspontja a *CD* oldalra esik. Bizonyítsuk be, hogy *E* felezi a *CD* oldalt.

C. 1296. Mekkorák annak a hegyesszögű egyenlőszárú háromszögnek a szögei, melynek súlypontját az egyik magasság talppontjára tükrözve a tükörkép a háromszög alapjának egyenesére esik?

C. 1297. Egy cirkuszban a fő attrakció az oroszlán és az elefánt mutatványa. Az állatok szeszélyessége miatt azonban nem mindig valósítható meg ez a két produkció. Az oroszlán az előadások $\frac{4}{5}$ részében lép porondra, míg az elefánt csak $\frac{3}{4}$ részében. Szerencsés cirkusz lévén, az előadások 99%-ában legalább az egyik állat szerepel. Mekkora valószínűséggel láthatjuk mindkét állatot egy műsoron?

C. 1298. A mellékelt *ábra* egy parkot szemléltet, ahol a szakaszok mutatják az ösvényeket. Hányféleképpen juthatunk el a bejárattól a kijáratig, ha minden ösvényen legfeljebb egyszer mehetünk végig, és az ösvényekről nem térhetünk le?



C. 1299. Oldjuk meg az $x^3 + (1 - 3b)x^2 + (3b^2 + 2b - 6)x - b^3 + b^2 - 6b + 9 = 0$ egyenletet, ha $x - b \geq 0$.

C. 1300. Egy konvex négyszög oldalainak hossza sorban $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+3}$, $\sqrt{a+2}$ és $\sqrt{2a+5}$, mindkét átlója $\sqrt{2a+5}$ hosszú. Határozzuk meg a négyszög legnagyobb szögét.